

#1. 그리디 기법 1

나정휘 (jhna917)

<https://justicehui.github.io/>

수학적 귀납법

수학적 귀납법

- 자연수에 대한 명제 $P(n)$ 이 모든 자연수에 대해 참임을 증명
- 또는 어떤 정수 n_0 에 대해, $n \geq n_0$ 을 만족하는 모든 n 에 대해 $P(n)$ 은 참
- (기저 조건) $P(n_0)$ 이 참이다.
- (귀납 조건) $n \geq n_0$ 일 때 $P(n)$ 이 참이면 $P(n+1)$ 이 참이다.
- $n \geq n_0$ 인 모든 정수 n 에 대해 $P(n)$ 은 참
 - $P(n_0) \Rightarrow P(n_0+1) \Rightarrow P(n_0+2) \Rightarrow P(n_0+3) \Rightarrow \dots$

수학적 귀납법

강한 수학적 귀납법

- 자연수에 대한 명제 $P(n)$ 이 모든 자연수에 대해 참임을 증명
- 또는 어떤 정수 n_0 에 대해, $n \geq n_0$ 을 만족하는 모든 n 에 대해 $P(n)$ 은 참
- (기저 조건) $P(n_0)$ 이 참이다.
- (귀납 조건) $n \geq n_0$ 일 때 $P(n_0), P(n_0+1), \dots, P(n)$ 이 참이면 $P(n+1)$ 이 참이다.
- $n \geq n_0$ 인 모든 정수 n 에 대해 $P(n)$ 은 참
 - $P(n_0) \Rightarrow P(n_0+1)$
 - $P(n_0), P(n_0+1) \Rightarrow P(n_0+2)$
 - $P(n_0), P(n_0+1), P(n_0+2) \Rightarrow P(n_0+3)$

수학적 귀납법 - 예시

예시 1. 1이 아닌 모든 자연수는 소수 여러 개의 곱으로 표현할 수 있음

- (기저 조건) $n = 2$ 이면 $2 = 2$ 로 쓸 수 있음
- (귀납 조건) $2, 3, \dots, n - 1$ 을 소수 여러 개의 곱으로 표현할 수 있을 때 n 도 가능함을 보이자.
 - n 이 소수이면 그 소수 하나만 쓰면 됨
 - n 이 합성수이면 2 이상 $n - 1$ 이하의 약수 d 를 찾을 수 있음
 - 귀납 가정에 의해 $2 \leq d, n/d < n$ 는 소수의 곱으로 표현할 수 있으므로 두 결과를 곱하면 됨

수학적 귀납법 - 예시

예시 2. $2^n \times 2^n$ 크기의 격자에서 한 칸을 제거한 것은 L 모양 타일로 채울 수 있음

- BOJ 14601. 샤워실 바닥 깔기 (Large)
- $n \geq 1$ 일 때 크기가 $2^{n-1} \times 2^{n-1}$ 인 한쪽 사분면을 제외한 나머지 부분을 L 모양 타일로 채울 수 있음
 - (기저 조건) $n = 1$ 이면 L 모양으로 3칸 비어 있으므로 그대로 넣으면 됨
 - (귀납 조건) $n \geq 2$ 이면 아래와 같이 $n - 1$ 짜리 형태 4개로 나눌 수 있고, 귀납 가정에 의해 각 조각을 채울 수 있음
 - XXAA
 - XXBA
 - CBBD
 - CCDD
- (기저 조건) $n = 0$ 이면 모든 칸이 채워져 있는 상태
- (귀납 조건) $n \geq 1$ 이면
 - 제거된 칸이 있는 사분면은 귀납 가정에 의해 채울 수 있고
 - 나머지 부분은 위에서 증명한 보조 정리에 의해 채울 수 있음

수학적 귀납법 - 예시

예시 3

- $N \times N$ 격자에서 M 칸은 검은색, 나머지는 흰색으로 칠해져 있음
- 가장 위에 있는 줄과 오른쪽에 있는 줄은 흰색으로 고정
- 나머지 칸들은 1초가 지날 때마다 (자기 자신), (한 칸 위), (한 칸 오른쪽) 중 더 많은 색으로 바뀜
- M 초 후에 모든 칸이 흰색으로 바뀜
- (기저 조건) $M = 1$ 이면 자명하게 1초 뒤에 없어짐
- (귀납 조건) M 칸이 M 초 이내에 모두 없어진다고 할 때, $M + 1$ 칸은 $M + 1$ 초 이내에 모두 없어짐
 - 검은색 점의 좌표 중, x 좌표의 최솟값을 x' , y 좌표의 최솟값을 y' 이라고 하자
 - $x = x'$ 인 점들은 $x > x'$ 인 점에 영향을 미치지 못하고, $y = y'$ 인 점들도 $y > y'$ 인 점에 영향을 못 미침
 - 따라서 M 초 뒤에 $x > x'$ 인 점은 모두 없어지고, 마찬가지로 $y > y'$ 인 점도 모두 없어짐
 - M 초가 지난 이후에 검은색 점이 남아있을 수 있는 곳은 (x', y') 이 유일하고, 이걸 $M + 1$ 초에 없어짐

귀류법

귀류법

- 명제의 결론이 부정이라고 가정했을 때 모순이 발생함을 보여 원래 명제가 참임을 증명
- 모든 n 에 대해 $P(n)$ 이 참임을 증명
 - $P(n)$ 이 거짓이 되는 n 이 있다고 가정
 - $P(n)$ 이 거짓이 되는 n 이 있으면 모순이 일어나는 것을 보임
 - $P(n)$ 이 거짓이 되는 n 이 없으므로 모든 n 에 대해 $P(n)$ 은 참

귀류법 - 예시

$n > 1$ 인 정수의 소인수분해가 유일함을 증명

- 소인수분해의 존재성은 강한 수학적 귀납법을 이용해 증명할 수 있음
- 유일하게 존재함을 증명해 보자
- (Euclid Lemma) $a \mid bc$ 이고 $\gcd(a, b) = 1$ 이면 $a \mid c$ 임
- n 의 서로 다른 소인수분해 $n = p_1 p_2 \dots p_s = q_1 q_2 \dots q_t$ 가 존재한다고 가정하자.
 - 일반성을 잃지 않고 $s \geq t$ 인 경우만 생각
 - $q_1 \mid n = p_1 p_2 p_3 \dots p_s$ 인데 p_1 과 q_1 은 모두 소수이므로 $q_1 \mid p_1$ 이거나 $q_1 \mid p_2 p_3 \dots p_s$
 - 동일한 논리로 $q_1 \mid p_1$ or $q_1 \mid p_2$ or $q_1 \mid p_3$ or ... or $q_1 \mid p_s$
 - 따라서 $q_1 = p_i$ 인 i 가 존재하고, $q_1 = p_1$ 이 되도록 p 를 재배열하자.
 - 비슷하게 $q_2 = p_2, q_3 = p_3, \dots$ 이 되도록 p 를 재배열할 수 있음
 - 만약 $s > t$ 이면 $p_{t+1} p_{t+2} \dots p_s \neq 1$ 이므로 $s = t$ 가 되어야 함
 - 모든 $1 \leq i \leq t$ 에 대해 $p_i = q_i$ 이므로 소인수분해는 유일하게 존재함

귀류법 - 예시

$\sqrt{3}$ 이 유리수가 아님을 증명

- $\sqrt{3}$ 이 유리수라고 가정하자.
- $\sqrt{3}$ 은 $n, m > 0$ 이고 $\gcd(n, m) = 1$ 인 두 정수 n, m 을 이용해 $\sqrt{3} = m/n$ 으로 나타낼 수 있음
- 양변을 제곱하고 이항하면 $3n^2 = m^2 > 1$
- $m > 1$ 이므로 m 을 소수들의 곱 $m = p_1 p_2 \dots p_k$ 으로 나타낼 수 있음
- $3 \mid m^2$ 이므로 $3 \mid p_1^2 p_2^2 \dots p_k^2$, 유clid 보조 정리에 의해 $3 = p_1$ 이 되도록 p 를 재배열할 수 있음
- $3n^2 = 3^2 p_2^2 p_3^2 \dots p_k^2$ 이므로 $n^2 = 3 p_2^2 p_3^2 \dots p_k^2$
- $3 \mid n^2$ 이므로 유clid 보조 정리에 의해 $3 \mid n$
- n 과 m 모두 3의 배수이므로 $\gcd(n, m) \geq 3$
- $\gcd(n, m) = 1$ 이라고 가정했는데 $\gcd(n, m) \geq 3$ 이므로 모순 발생
- 따라서 $\sqrt{3}$ 은 유리수가 아님

귀류법 - 예시

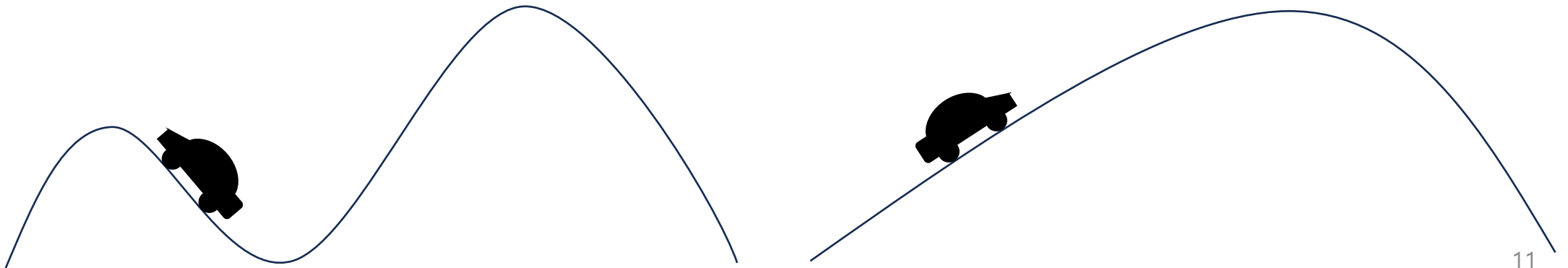
소수는 무한히 많음을 증명

- 소수가 유한하다고 가정하고, 그 소수를 $p_1 \leq p_2 \leq \dots \leq p_k$ 라고 하자.
- $n = p_1 p_2 \dots p_k + 1 > 1$ 을 생각해 보자.
- 산술의 기본 정리에 의해 $n = q_1 q_2 \dots q_j$ 로 나타낼 수 있음 (모든 $1 \leq i \leq j$ 에 대해 $q_i \in \{p_1, p_2, \dots, p_k\}$)
- n 과 $p_1 p_2 \dots p_k$ 모두 q_1 의 약수이므로 $n - p_1 p_2 \dots p_k$ 도 q_1 의 약수임
- 따라서 $(n - p_1 p_2 \dots p_k) / q_1 = 1 / q_1$ 이 정수
- $q_1 \neq 1$ 이므로 $1 / q_1$ 이 정수라는 것에 모순 발생

그리디 기법

그리디

- Greedy: [형용사] 탐욕스러운
- 현재 상태에서 가장 좋은 선택을 하는 방법
 - 현재 상태에서 가장 좋은 선택이 전체 범위에서도 가장 좋은 선택이라는 것은 보장 못함
 - 만약 이 전략이 전체 범위에서도 최적이라면, 그리디 기법으로 문제를 해결할 수 있음
- 동적 계획법 vs 그리디 기법
 - 동적 계획법: $D[i]$ 를 계산할 때 $1 \leq j < i$ 인 모든 $D[j]$ 를 확인
 - 그리디 기법: $D[i]$ 를 계산할 때 적당한 $D[j]$ 하나만 확인
- Local Optimum vs Global Optimum



그리디 예시 - 1

BOJ 11047 동전 0

- N가지 종류의 동전을 사용해서 K원을 만들어야 함
- 사용하는 동전의 개수를 최소화
- 동전은 서로 약수/배수 관계, 1원 짜리 동전 항상 존재
- 가격이 큰 동전부터 최대한 많이 사용하는 전략
 - 증명?

그리디 예시 - 1

BOJ 11047 동전 0

- 그리디 기법으로 구한 답보다 더 좋은 해가 없다는 것을 증명
 - 가격 내림차순으로 동전을 정렬하자 : $C[i]$ = i 번째로 비싼 동전의 금액
 - 그리디에서 각 동전을 사용한 개수를 저장한 리스트 A
 - 실제 최적해에서 각 동전을 사용한 개수를 저장한 리스트 B
- (귀류법) A보다 더 적은 동전을 사용한 최적해 B가 존재한다고 가정
 - A와 B가 처음으로 다른 지점 i 가 존재
 - 비싼 동전부터 최대한 많이 가져가는 전략에 의해 $A[i] > B[i]$
 - $C[i] * (A[i] - B[i])$ 원 만큼의 차이를 채우기 위해 $C[i]$ 보다 싼 동전을 더 사용할 텐데
 - $C[i]$ 의 약수면서 싼 동전으로 $C[i] * (A[i] - B[i])$ 원을 만드는데 $A[i] - B[i]$ 보다 많은 동전이 필요하므로
 - B는 A보다 동전을 더 적게 사용할 수 없다.

그리디 예시 - 2

BOJ 25312 200% Mixed Juice!

- N개의 물건이 있고, i번째 물건의 무게는 W_i , 가격은 P_i 원
- 무게의 합이 Xkg 이하가 되도록 물건을 적당히 선택할 때
- 가능한 가격의 합의 최댓값을 구하는 문제
- 단, 물건을 원하는 대로 분할할 수 있음
 - (W_i, P_i) 를 무게가 x , W_i-x 인 물건으로 분할하면
 - $(x, P_i/W_i * x), (W_i-x, P_i/W_i * (W_i-x))$ 로 분할됨
- 무게 대비 가격(효율, P_i/W_i)이 높은 물건부터 가져가는 전략

그리디 예시 - 2

BOJ 25312 200% Mixed Juice!

- 그리디 기법으로 구한 답보다 더 좋은 해가 없다는 것을 증명
 - 가격이 0 이하인 물건은 신경 쓰지 않아도 됨
 - 무게의 합이 X 이하인 경우, 모두 가져가는 것이 최적
 - 그리디 알고리즘은 이 경우를 잘 처리함
 - 그렇지 않은 경우, 무게의 합이 X 가 되도록 가져가는 것이 최적
 - 그리디 알고리즘은 이 경우 무게의 합이 X 가 됨
 - 그리디 알고리즘이 가격을 최대화하는지 증명하자.

그리디 예시 - 2

BOJ 25312 200% Mixed Juice!

- 증명 (cont.)
 - 물건을 효율에 대한 내림차순으로 정렬하자. 편의상 효율이 모두 다르다고 가정한다.
 - 그리디에서 각 물건을 가져간 무게를 저장한 리스트 A, 실제 최적해의 리스트 B
 - (귀류법) A보다 가격이 더 비싼 **최적해** B가 존재한다고 가정
 - A와 B가 처음으로 달라지는 지점 i 가 존재
 - 효율이 높은 것부터 최대한 많이 가져가는 그리디 알고리즘에 의해 $A[i] > B[i]$
 - B는 최적해이기 때문에 $A[j] < B[j]$ 인 $j(> i)$ 가 존재
 - 새로운 해 B'를 구성한다. $B'[i] = B[i] + \text{eps}$, $B'[j] = B[j] - \text{eps}$ 이고, 다른 모든 $B'[k] = B[k]$ 이다.
 - B와 B'의 무게는 동일하지만 가격은 B'가 더 비싸다.
 - B가 최적해라는 가정에 모순이 생겼으므로 A보다 더 비싼 최적해는 존재하지 않는다.

그리디 예시 - 3

BOJ 11399 ATM

- i 번째 사람은 ATM기를 P_i 시간 동안 점유함
- 모든 사람의 대기 시간의 합을 최소로 하는 처리 순서를 찾는 문제
- 소요 시간이 짧은 사람부터 처리하면 됨

그리디 예시 - 3

BOJ 11399 ATM

- P_i 가 작은 사람부터 처리하는 것이 최적임을 증명
 - 두 사람 P_k, P_{k+1} 중 먼저 처리해야 하는 것을 결정하자.
 - 인접한 원소의 순서만 잘 결정하면, 버블 정렬 느낌으로 전체 원소를 정렬할 수 있음

$P_1 \sim P_{k-1}$	P_k	P_{k+1}	$P_{k+1} \sim P_n$
$P_1 \sim P_{k-1}$	P_{k+1}	P_k	$P_k \sim P_n$

- P_k 와 P_{k+1} 의 대기 시간만 보면 됨
- 위 : $\text{sum}(P_1 \sim P_{k-1}) + \text{sum}(P_1 \sim P_{k-1}) + P_k$
- 아래 : $\text{sum}(P_1 \sim P_{k-1}) + \text{sum}(P_1 \sim P_{k-1}) + P_{k+1}$
- 동류항 없애면 각각 P_k, P_{k+1} 만 남음
- 그러므로 $P_k < P_{k+1}$ 이면 P_k 가 먼저 오도록 정렬하는 것이 이득

그리디 예시 - 4

BOJ 1931 회의실 배정

- 한 개의 회의실과 N개의 회의가 있음
 - 각 회의는 시작 시간과 종료 시간이 있어서, 해당 기간 동안 회의실을 점유함
 - 몇 개의 회의를 선택해서 서로 겹치지 않도록 회의를 진행할 때
 - 진행 가능한 회의의 최대 개수를 구하는 문제
-
- 끝나는 시간이 빠른 회의부터 선택하는 그리디 전략으로 답을 구할 수 있음

그리디 예시 - 4

BOJ 1951 회의실 배정

- 종료 시간이 가장 빠른 회의를 포함하는 최적해가 있다는 것을 증명
 - 종료 시간이 가장 빠른 회의 m 을 포함하지 않는 최적해 O 가 존재한다고 하자.
 - 당연히 O 에는 겹치는 회의가 존재하지 않는다.
 - O 에서 종료 시간이 가장 빠른 회의 x 를 제거하고 m 을 추가한 O' 를 생각해보자.
 - O 와 O' 의 크기는 동일하고, O' 에는 겹치는 회의가 존재하지 않는다.
 - 그러므로 모든 최적해는 m 을 포함하도록 바꿀 수 있다.
- 종료 시간이 가장 빠른 회의를 선택한 뒤
- 그 회의와 겹치는 회의를 모두 제거하고
- 다시 종료 시간이 가장 빠른 회의를 선택하는 방식

정리

지금까지 본 증명 방법

- A보다 좋은 최적해 B가 없음을 보임
 - ex. 동전 0
- A보다 좋은 최적해 B가 있다고 가정한 뒤, B가 최적해가 아님을 보임
 - ex. 200% Mixed Juice! (Fractional Knapsack Problem)
- 원소의 우선순위를 정한 뒤, 우선순위가 높은 것부터 선택하는 것이 최적임을 보임
 - ex. ATM (SJF Scheduling)
- 어떤 원소를 포함하는 최적해가 항상 존재함을 보임
 - ex. 회의실 배정